Δραστηριότητες με το Sketchpad



1. Λιμνήσκος Μπερνούλι –Καμπύλες Κασίνι

Δίδονται δύο σημεία O_1 και O_2 , που απέχουν απόσταση 2 α . Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων Μ: $(MO_1)(MO_2)=\alpha^2$. (Λημνίσκος του Μπερνούλι)

2. *Κυλιόμενος κύκλος*

Στον κυλιόμενο κύκλο επί ευθείας, να φέρετε ένα ευθ. τμήμα που να έχει αρχή το κέντρο του κύκλου και τέλος ένα σημείο έξω από τον κύκλο. Καθώς κυλίεται ο κύκλος, ένα σημείο του τμήματος είναι μέσα στον κύκλο, επί του κύκλου ή έξω από τον κύκλο, διαγράφοντας τρεις διαφορετικούς Γ.Τ. Να τους βρείτε (Απλωμένη, οξεία ή αναδιπλούμενη κυκλοειδής.)

3. *Τετραγωνισμός κυλιόμενου κύκλου*

Πώς μπορεί να τετραγωνιστεί ένας κυλιόμενος κύκλος; (σε μια περιστροφή διανύει διάστημα 2πR και εμείς θέλουμε χ: $\chi^2=\pi R^2$)

4. *Ένας ορισμός της έλλειψης:*

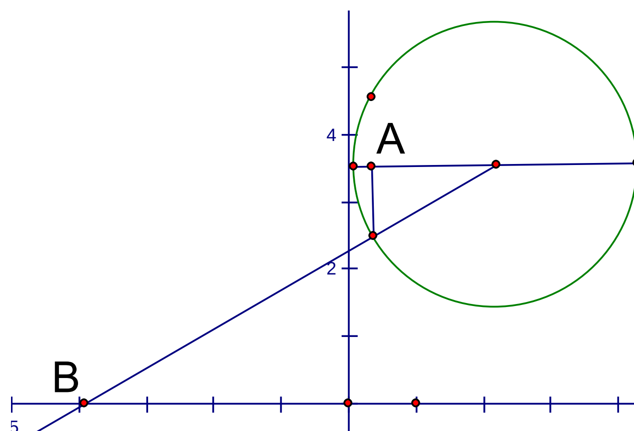
Είναι ο εξής: «Έστω κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Β εντός του κύκλου. Τότε ο γ.τ. των σημείων Μ: (ΜΒ) = δ , όπου δ η απόσταση του Μ από τον κύκλο, λέγεται έλλειψη με διευθετούντα κύκλο (Ο,ρ) και μία Εστία το Β (η άλλη είναι το Ο)

5. *Επικυκλοειδής και υποκυκλοειδής.*

Κύκλος κυλίεται επί κύκλου και ένα σημείο του παράγει την επί-κυκλοειδή. Κύκλος κυλίεται μέσα σε κύκλο (υπό τον κύκλο) και παράγει την υποκυκλοειδή.

6. *Μεταβλητή που να διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, με διάτρεξη ενός μικρού (ανοικτού) διαστήματος*

Θέλουμε, μια μεταβλητή να μεταβάλλεται σε ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα , όμως να διαγράφει όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό, είναι ένα κατασκευαστικό πρόβλημα . εκμεταλλευόμενος την τοπολογική ομοιότητα του $\mathbb{R}$ με οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα , φτιάχνω την παρακάτω κατασκευή –βοηθητικό εργαλείο. Σχεδιάζω τους άξονες. Λαμβάνω ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τον χχ΄. Βρίσκω το μέσον του, κατασκευάζω τον κύκλο με διάμετρο το τμήμα και δουλεύω με το κάτω ημικύκλιο. Θεωρώ τυχαίο σημείο Α επί του ευθυγράμμου τμήματος. Το προβάλω στο ημικύκλιο και μέσω του κέντρου του κύκλου, το προβάλω στην χχ΄, στο Β. Καθώς το σημείο Α διαγράφει το τμήμα (το ανοικτό) η τελική του αντιστοίχιση το Β, διαγράφει το $\mathbb{R}$.



ως Η τετμημένη του Β είναι η μεταβλητή μου, που διατρέχει το $\mathbb{R}$. Θεωρώντας ως c την τετμημένη του Β, να κατασκευάσετε τις μονοπαραμετρικής εξισώσεις καμπυλών :

$$(x-c)^2+y^2=4$$

$$c(x-1)+(y-2)=0$$

$$y=2cx-c^2$$

Για κάθε κατασκευή να σχεδιάσετε το ίχνος του κύκλου της πρώτης περίπτωσης και των ευθειών της δεύτερης.

7. **Η ευθειοποίηση .**

Σταθερό σημείο Ρ είναι εντός γωνίας χΟψ. Να αναζητηθούν σημεία Α και Β επί των Οχ και Οψ, έτσι ώστε το τρίγωνο ΡΑΒ να είναι ελαχίστης περιμέτρου. [1]

8. **Η Αντιστροφή ως προς κύκλο .**

---

1. [1] (Η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας με συμμετρία ως προς άξονες ως οριακής θέσης)

Μια απεικόνιση ονομάζεται γενικά **αντιστροφή** *(ο τόνος σε λήγουσα)* όταν είναι αντιστρέψιμη και ταυτίζεται με την αντίστροφή της. Η αξονική συμμετρία και η κεντρική συμμετρία είναι δύο παραδείγματα αντιστροφών. Υπάρχει μια κλασική αντιστροφή , η **«αντιστροφή ως προς κύκλο»** , η οποία δημιουργείται ως εξής: Έστω κύκλος (Μ,ρ) και Ρ σημείο εκτός του κύκλου. Η εικόνα του Ρ βρίσκεται , αν από το Ρ φέρω μία εφαπτόμενη στον κύκλο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο που ορίζεται με υποτείνουσα την ΜΡ και κάθετες την ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής και στο εφαπτόμενο τμήμα , προβάλω την κορυφή της ορθής στην υποτείνουσα το Ρ΄ που είναι η εικόνα του Ρ. Ισχύει (ΡΜ)(ΜΡ΄)=ρ^2. Αντιστρόφως, το Ρ΄ , απεικονίζεται στο Ρ.
Χρησιμοποιώντας την απόκρυψη, φτιάξτε μια δυναμική κατασκευή που να έχει τον κύκλο αντιστροφής και τα δύο σημεία (αρχέτυπο , εικόνα) Για να μην είναι «μισή» η κατασκευή, θα πρέπει, κάθε εξωτερικό σημείο του κύκλου να απεικονίζεται σε εσωτερικό, ΑΛΛΑ και κάθε εσωτερικό σε εξωτερικό σημείο. Η Αντιστροφή έχεις ιδιότητες που πρέπει να δείτε:

α) Είναι απεικόνιση (γιατί;) 1-1 και επί του $\mathbb{R}^2-\{M\}\to\mathbb{R}^2-\{M\}$

β) Τα σημεία του κύκλου αντιστροφής είναι τα μόνα σταθερά σημεία της αντιστροφής («Σταθερά» εννοούμε, τα σημεία του επιπέδου Χ: $X\equiv f(X)$

γ) Μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Μ, απεικονίζεται σε κύκλο που διέρχεται από το Μ.

δ) ένας κύκλος **που διέρχεται** από το Μ (χωρίς το Μ) απεικονίζεται σε ευθεία.

ε) ένας κύκλος που **δεν** διέρχεται από το Μ, απεικονίζεται σε κύκλο, που επίσης δεν διέρχεται από το Μ.

στ) Οι ευθείες που διέρχονται από το Μ (χωρίς το Μ) απεικονίζονται στον εαυτό τους.

ζ) Κάθε κύκλος που τέμνει ορθογώνια τον κύκλο αντιστροφής, απεικονίζεται στον εαυτό του.

Η αντιστροφή, κρύβεται πίσω από το καθημερινό γεγονός της απεικόνισης ευθύγραμμων αντικειμένων σε κοίλα ή κυρά κάτοπτρα. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια δύσκολη κατασκευή (περίπτωση) του Απολλωνείου προβλήματος. (Κατασκευή που εφάπτεται σε δύο δοθέντες και διέρχεται από δοθέν σημείο.)
Να διερευνήσετε την εικόνα ενός τριγώνου(Εσωτερικό τριγώνου, σημείο που κινείται στην περίμετρο του τριγώνου, κατασκευή τόπου)

9. Η έλιξ του Αρχιμήδους.

Φανταστείτε έναν κύκλο στον οποίο εφάπτεται μια ευθεία. στο σημείο επαφής ορίζεται μια ακτίνα του κύκλου. Αυτή η ακτίνα, **συνδέεται αναπόσπαστα** με το σημείο επαφής. Αρχίζει η ευθεία να κυλίεται επί του κύκλου. Τότε το άκρο της ακτίνας που ήταν πάνω στο κέντρο του κύκλου, διαγράφει μια καμπύλη, που λέγεται «έλιξ του Αρχιμήδους» ή σπείρα του Αρχιμήδη . Να δημιουργήσετε την κατασκευή.
Εναλλακτική κατασκευή: Έχω έναν κύκλο (Ο,ρ) και ημιευθεία Οχ. Σημείο Μ, αρχίζει να κινείται από το Ο πάνω στην ημιευθεία Οχ, ενώ ταυτοχρόνως η ημιευθεία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα . τότε το Μ, ορίζει Αρχιμήδεια έλικα.

10. Καμπυλότητα καμπύλης και ενειλιγμένη καμπύλης

Σε κάθε σημείο μιας καμπύλης, υπάρχει η διαισθητική έννοια της καμπυλότητας, η οποία χρειάζεται κάποιο αυστηρό ορισμό. Η έννοια της καμπυλότητας λοιπόν σε ένα σημείο $A(\chi_0,f(\chi_0))$ συνάρτησης (για να το περιορίσουμε, αλλά χωρίς να χαλάσουμε την γενίκευση) έχει να κάνει με το να θεωρήσω στο Α, έναν κύκλο που να εφάπτεται στην καμπύλη και να έχει την ίδια πρώτη παράγωγο όπως και την ίδια δεύτερη παράγωγο με την καμπύλη στο Α . Επειδή ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση, μπορώ να θεωρώ στο Α κατάλληλο περιορισμό που να δείχνει το τμήμα του κύκλου που χρειάζεται για να έχει νόημα η επαφή. Με το να βρω το κέντρο του κύκλου Κ, τότε η ΚΑ θα είναι η ακτίνα ρ και το 1/ρ, είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας (χρησιμοποιείται στην κατασκευή στροφών στην οδοποιία) Αν λυθεί ένα σύστημα 3 εξισώσεων ($\kappa(\chi_0)=f(x_0)$, $\kappa'(\chi_0)=f'(x_0)$, $\kappa''(\chi_0)=f''(x_0)$) τότε για κάθε (x, f(x)) , καθορίζονται οι άγνωστες συντεταγμένες του κέντρου όπως και η ακτίνα.

αν το σημείο είναι το (x, f(x)) τότε το κέντρο είναι το Ο(ξ,η) , με:

$$\xi = x - f'(x)\cdot\frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$$

$$\eta = f(x) + \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$$

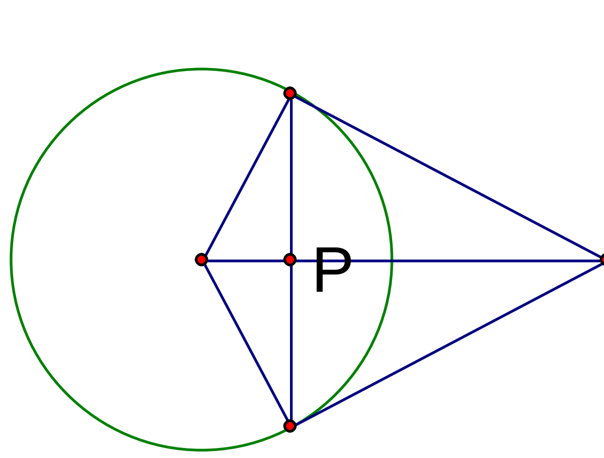
Ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων λέγεται **ενειλιγμένη της καμπύλης** (εδώ συνάρτησης)

11. <u>Τρεις κωνικές τομές σε ένα σχήμα</u>

Οι τρεις κωνικές τομές, μπορούν να οριστούν και οι τρεις ως ο γ.τ. των σημείων : α) Για μεν την υπερβολή ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από ευθεία και σημείο σταθερό λόγο ε<1 β) για την έλλειψη ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από σημείο και ευθεία σταθερό λόγο ε=1 , γ) για την παραβολή ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από ευθεία και σημείο σταθερό λόγο ε>1.

Να κατασκευαστεί ένα σχήμα, όπου να μπορούμε να κάνουμε δυναμικό χειρισμό των γ. τόπων , χωρίς την επιλογή σχεδίασης ίχνους.

Να κατασκευαστεί ένα σχήμα που να γίνονται επιλογές λόγου σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και να σχεδιάζεται ο γ.τ. κάθε φορά (Υπάρχει ένα κώλυμα, θα το συζητήσουμε, αφού πρώτα το διαπιστώσουμε



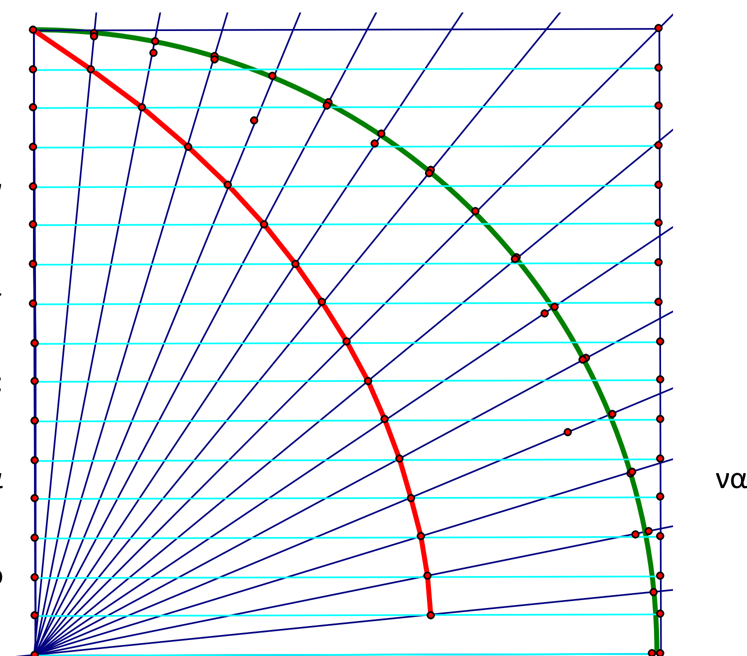
12. Η πολικότητα

Πολικότητα είναι μια απεικόνιση σημείου σε ευθεία. μπορεί να οριστεί για όλες τις κωνικές τομές. Εδώ θα την ορίσουμε ως προς κύκλο. Αν έχω ένα σημείο P εκτός κύκλου και φέρω από το P προς τον κύκλο τις δύο εφαπτόμενες, με A και B τα σημεία επαφής, τότε η ευθεία AB είναι η πολική του P ως προς τον κύκλο. Αν το P είναι σημείο του κύκλου, τότε η πολική του, είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο P. Αν το P είναι σημείο εντός του κύκλου, τότε η πολική ορίζεται ορίζεται κατασκευαστικά όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα σημεία μιας ευθείας (ε) , απεικονίζονται σε δέσμη ευθειών με κοινό σημείο το Β. Το Β, απεικονίζεται στην (ε)

Συγχωνεύστε το P σε κύκλο και βρείτε το γ.τ. των ευθειών καθώς το P κινείται στον κύκλο. (είναι από τις πιο εντυπωσιακές εικόνες)

13. Η καμπύλη του Ιππία του Ηλείου (425 π.Χ.)



Η καμπύλη αυτή, έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχαιότητα για τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας και για τετραγωνισμό του κύκλου. Κατασκευάζεται ως εξής: (Βλέπε σχήμα) Μια ακτίνα , έχει γωνιακή ταχύτητα για να καλύψει το τεταρτοκύκλιο, τόση έτσι ώστε το σημείο που θα κατέβει την μία κατακόρυφη αριστερή πλευρά του τετραγώνου, να τερματίσουν μαζί. Το μεν σημείο τερματίζει στην κάτω αριστερή κορυφή του τετραγώνου και η ακτίνα στην κάτω πλευρά του τετραγώνου. Η καμπύλη, έχει σχεδιαστεί προσεγγιστικά στατικά με διαίρεση της πλευράς του τετραγώνου σε 16 ίσα τμήματα και του τεταρτοκυκλίου , ομοίως σε 16 ίσα τόξα. Η καμπύλη αυτή, ούσα γνωστή, τριχοτομεί οποιαδήποτε γωνία. την είχε χρησιμοποιήσει και ο Δεινόστρατος για τετραγωνισμό του κύκλου. Εσείς να την φτιάξετε με δυναμικό τρόπο και να ρυθμίσετε τις ταχύτητες να έχουν ανάλογη σχέση και να εξηγήσετε πώς γίνεται η τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας.